PROBLEME *(11 points)* commun à tous les candidats

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

PARTIE A

On considère la fonction f_1 définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative .

1) Montrer que pour tout réel positif x, $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$.

En déduire le sens de variation de f_1.

2) Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$).

Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Dresser le tableau de variation de f_1

4) On appelle Δ, la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position de C_1 par rapport à Δ.

5) Tracer C_1 et Δ.

PARTIE B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0, +\infty[$, par $f_3 = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$.

En déduire le sens de variation de f_3.

2) Déterminer les positions relatives de C_1 et C_3.

3) Tracer C_3 dans le même repère que C_1 (on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$)

PARTIE C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie

sur $[0, +\infty[$ par $f_n = x^n e^{-x^2}$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le repère $(0, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$.

On note α_n ce maximum.

2) On appelle S_n le point de C_n d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Montrer que, pour tout n, C_n passe par S_2.

Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.

3) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$, par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1+\ln(\frac{x}{2})]}$ c'est à dire

$g(x) = \exp[\frac{x}{2}(-1+\ln(\frac{x}{2}))]$

a) Etudier le sens de variation de g

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$

En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.