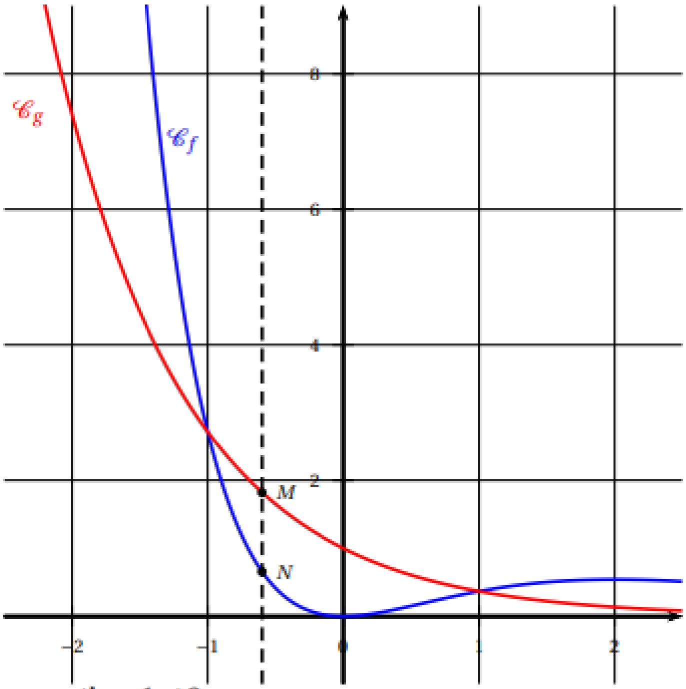
Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$




**La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.**

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   b. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on considère les points $M$ de coordonnées $(x ; f(x))$ et $N$ de coordonnées $(x ; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance $MN$. On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.
   On admet que la fonction $d$ est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on note $d'$ sa fonction dérivée.
   a. Montrer que $d'(x) = e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.
   b. En déduire les variations de la fonction $d$ sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
   c. Déterminer l'abscisse commune $x_0$ des points $M_0$ et $N_0$ permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance $M_0N_0$.
3. Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = x + 2$.
   On considère la fonction $h$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
   En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite $\Delta$ et de la courbe $\mathscr{C}_g$.