PROBLEME *(11 points)* commun à tous les candidats

Le but du problème est l'étude d'une fonction g_k où k est un réel fixé qui vérifie :

$$0 < k < \mathrm{e}.$$

Dans la partie **A** on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie **B**.

Partie A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur R par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x - k.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 + 0,25 point)

2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f.
Calculer $f(1)$. (0,5 + 0,25 + 0,25 point)

3. *a*) Établir que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;1[$ et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$. (1 point)
b) Montrer que $\mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\mathrm{e}^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$. (0,75 point)
On démontrerait de même que β_k vérifie l'égalité :

$$\mathrm{e}^{\beta_k} - k\beta_k = (\mathrm{e}^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1).$$

4. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. (0,5 point)

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur R par :

$$u(x) = \mathrm{e}^x - kx.$$

a) Étudier le sens de variation de u. (0,75 point)

b) On rappelle que $0 < k < \mathrm{e}$. Justifier la propriété suivante :
pour tout réel x, $\mathrm{e}^x - kx > 0$. (0,5 point)

2. Soit g_k la fonction définie sur R par : $g_k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - k}{\mathrm{e}^x - kx}$.
On note (C_k) la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a) Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,25 + 0,5 point) *b*) Prouver que : $g'_k(x) = \dfrac{k.f(x)}{(e^x - kx)^2}$. (0,5 point)

c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$. (0,5 + 0,25 point)