

Partie B - Étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a) f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f , calculer, pour tout réel x , $f'(x)$ et $f''(x)$. (0,5 point)
 - b) Étudier le sens de variation de la dérivée f' . (0,5 point)
 - c) Démontrer que, pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$. (0,25 point)
 - d) Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,25 point)
 - e) Dresser le tableau de variation de la fonction f . (0,25 point)
-
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de (D) et (C). (0,75 point)
 - b) La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).
Déterminer les coordonnées de A. (0,25 point)
-
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution notée α , puis vérifier que $0 < \alpha < 1$. (0,5 point)
-
4. a) Construire la droite (D), le point A défini au 2.b), la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C). (0,5 point)
 - b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α . (0,25 point)