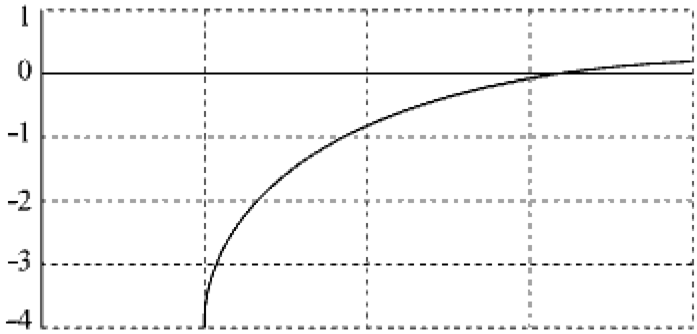
PROBLÈME *(11 points)* commun à tous les candidats

Soit la fonction numérique *f* définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2}$.

Partie A - Recherche graphique d'un extremum

L'observation de la courbe représentative de la fonction *f* sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que *f* admet un minimum sur l'intervalle [0,5 ; 2].



On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction *f* ′, dérivée de *f*, sur l'intervalle [0,5 ; 2].

Quels sont les éléments graphiques concernant *f* ′ qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de *f* sur [0,5 ; 2] ? (0,5 *point*)

À l'aide de ce graphique, donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum. (0,25 *point*)

Partie B - Étude de la fonction F

On considère la fonction *h* définie sur [0 ; + ∞[par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$.

1. Déterminer les variations de *h* (on précisera *h*(0) mais la limite en + ∞ n'est pas demandée). (0,5 *point*)

2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$. (0,25 *point*)

En déduire qu'il existe un unique réel *a* appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$ tel que

$$h(a) = 0.$$ (0,5 *point*)

En déduire le signe de *h* sur [0 ; + ∞[. (0,5 *point*)

3. Étude de la fonction *f*

a) Calculer les limites de *f* aux bornes de l'intervalle]0 ; + ∞[. (1 *point*)

b) Montrer que, pour tout nombre *x* strictement positif :

$$f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3} \text{ .} \qquad (0{,}5 \textit{ point})$$

En déduire le sens de variation de *f* et dresser son tableau de variation. (1 *point*)

c) Montrer que $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de *f*(*a*). (0,5+ 0,5 *point*)

feuille 29