PROBLÈME *(11 points)* commun à tous les candidats

On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal; $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 4 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction *g* définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=x+2-e^x$.

1. Étudier le sens de variation de *g* sur [0 ; +∞[et déterminer la limite de *g* en +∞.

(0,75 + 0,5 point)

2. *a*) Montrer que l'équation *g*(*x*) = 0 admet une solution et une seule dans [0 ; +∞[.

(0,5 point)

On note α cette solution.

b) Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3. En déduire le signe de *g*(*x*) suivant les valeurs de *x*.

Partie B - Étude de la fonction *f* et tracé de la courbe (C)

1. *a*) Montrer que, pour tout *x* appartenant à [0 ; +∞[, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$. (0,5 point)

b) En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; +∞[. (0,5 point)

2. *a*) Montrer que, pour tout réel positif *x*, $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. (0,25 point) *b*) En déduire la limite de *f* en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

(0,5 + 0,25 point)

3. *a*) Établir que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$. (0,5 point)

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$d'amplitude 10^{-2}. (0,25 point)

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

(0,5 point)

5. *a*) Établir que, pour tout *x* appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$**,**

$f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{x\mathrm{e}^{x}+1}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{x}-1$. (0,25 point)

b) Étudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. (0,5 point)

En déduire le signe de *u*(*x*). (0,25 point)

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

6. Tracer (C) et (T).