PROBLEME commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction g, définie sur R, qui, à tout x, associe :

$$g(x) = e^x(x - 1) + x^2.$$

1. *a*) Montrer que la dérivée de la fonction g sur R est :

$$g'(x) = x(e^x + 2)$$ (0,5 point)

b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. (0,25 + 0,5 point)

c) Étudier le signe de $g'(x)$ sur R, et dresser le tableau de variation de g sur R.

(0,25 + 0,25 point)

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Montrer que α est dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2};1\right]$. (1 point)

Partie B

Soit la fonction *f* définie sur [0, +∞[par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$

1. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur [0, +∞[, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I. (0,5 + 0,5 point)

2. *a*) Calculer la dérivée de *f* et en déduire le sens de variation de *f* sur [0, +∞[.

(0,5 + 0,5 point)

b) Déterminer la limite de *f* en +∞. (0,25 point)

c) Dresser le tableau de variation de *f*. (0,25 point)

d) Construire la courbe représentative (C) de *f* sur [0, +∞[dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à (C) aux points d'abscisse 0 et 1. (1 point)