EXERCICE 80

Soit p un nombre premier. Le but de l'exercice est de démontrer que $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{p}$ soit un nombre rationnel ; écrivons alors $\sqrt{p}$ sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et a et b premiers entre eux.

Démontrer que nécessairement p divise a.

Démontrer alors que p divise b.

Conclure.

EXERCICE 81

Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers :

15 548 ; 1 583 631 ; 403×697 ; 1900^{2000}.

EXERCICE 82

Après avoir décomposé chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers, déterminer l'ensemble de ses diviseurs positifs : 1 425 ; 8 303.

EXERCICE 83

1) a) Comment peut-on reconnaître, sur sa décomposition en produit de facteurs premiers, qu'un entier naturel n est un carré ?

b) Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel il faut multiplier 240 pour que le produit soit un carré ?

2) Démontrer qu'un entier naturel qui possède un nombre impair de diviseurs positifs est un carré.

EXERCICE 84

Soit $n = 2^a \times 3^b$, où a et b sont deux entiers naturels.

1) Déterminer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}$ de n.

2) Déterminer n sachant que le nombre $12n$ possède deux fois plus de diviseurs que n.

EXERCICE 86

1) Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2.

Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4.

Donner deux exemples de chacun de ces cas.

2) Le but de cette question est de montrer que les nombres premiers congrus à -1 modulo 4 sont en nombre infini.

Supposons que les nombres premiers congrus à -1 modulo 4 soient en nombre fini.

On appelle alors $p_1, p_2, \ldots, p_n$ l'ensemble de ces nombres.

On note $A = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ le produit de tous ces nombres et on pose $B = 4A - 1$.

a) Montrer que B est congru à -1 modulo 4.

b) Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

c) Montrer que, parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.

d) Conclure.