EXERCICE 2 7 points **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2+2t \end{cases}$

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.
On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

b. Montrer que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x-y+2z-3=0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.