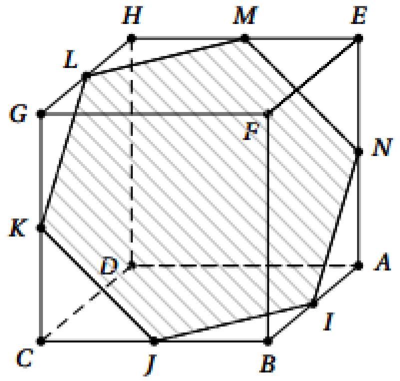
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 0 ; 0)$, $A(0 ; 1 ; 0)$, $H(0 ; 0 ; 1)$ et $E(0 ; 1 ; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

   b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.