Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   - **a.** On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle :
     (E$'$) $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   - **b.** Résoudre l'équation différentielle (E$'$).
   - **c.** Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.
   Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.