

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

- a. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.
- b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c. Étudier les variations de la fonction f .

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} . La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y' = \frac{y}{4}.$$

- a. Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
- b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
- c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \begin{cases} u'(t) &= \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

- a. On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3) \begin{cases} h'(t) &= -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

- b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .
- c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?