

Partie A : Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}.$$

On donne une fonction φ dérivable sur \mathbb{R} et la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-3x}\varphi(x).$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur \mathbb{R} et vérifie $\varphi(0) = \frac{e}{2}$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1 + e^{-3x}}.$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f .
2. Tracer \mathcal{C} .
3. Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$.
 - a. Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α .
 - b. Exprimer I_α en fonction de α .
 - c. Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.