TS **EQUATIONS DIFFERENTIELLE** feuille 20

-

A. On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$\boldsymbol{y' - 2y = 2\left(e^{2x} - 1\right).}$$

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2xe^{2x} + 1$$

   est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).
3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la **partie B**.

B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

   b. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,dx$.

   c. Interpréter graphiquement les résultats des questions **a.** et **b.**.

C. On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.
3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la **partie B**).