Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les deux évènements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$$

$$p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si,
$2^{n-1} = n + 1$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par
$u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$
Calculer u_2, u_3, u_4.

Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants