Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

A.

Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égal à O.
2. Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k valant successivement l, 2, 3 et 4.

B.

Dans cette question, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.
De même, on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche et ici encore X sera nul si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k étant un entier naturel variant de 1 à n.
2. On considère le polynôme P tel que :

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

   Soit E(X) l'espérance de la variable aléatoire X. Montrer que :

$$E(X) = \frac{3}{5}P\left(\frac{2}{5}\right).$$

3. On sait que pour tout réel x différent de 1, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

   a. En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, en déduire une autre expression de :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

   b. En déduire que $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$.