Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tel que $15u - 26v = 1$.
   Trouver un tel couple.
2. En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,k_0)$ de l'équation (E).
3. Montrer que $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.
4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;\,k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases} \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,
- on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26,
- on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot MATHS.
2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.
   - **a.** Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$.
   - **b.** En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.
   - **c.** En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.
3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.
   Décoder le mot WHL.
4. Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.