PROBLEME *(11 points)* commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction *f* définie pour tout réel *x* différent de 1 par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal

$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a)* Étudier les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et lorsque x tend vers 1.

Interpréter graphiquement ces résultats. (0,5 + 0,5 point)

b) Vérifier que, pour tout x différent de 1, $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}.$$ (0,5 point)

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (0,5 point)

2. *a)* Montrer que $f'(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$. (0,5 point)

b) Étudier les variations de *f*. (0,5 point)

c) Montrer que *f* admet un minimum que l'on précisera sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$.

(0,5 point)

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur **R**.

1. Résoudre (E). (0,75 point)

2. On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $\left(ax+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$.

On note alors

$$h_a(x)=\left(ax+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$$

où *a* est un nombre réel. (0,5 point)

b) Faire l'étude du sens de variation de h_a selon les valeurs de *a* et montrer que, pour tout réel *a* différent de 0,

h_a admet un extrémum pour une valeur de *x* que l'on déterminera en fonction de *a*.

(1 + 0,5 point)

c) On note C_a la courbe représentative de h_a et S_a le point de C_a correspondant à l'extrémum de h_a ; vérifier que, pour tout réel *a* différent de 0, S_a est un point de Γ, la courbe définie dans la partie **A**.
(0,5 point)

Partie C

Sur la feuille donnée en annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les courbes C_a pour $a=\frac{1}{4}$ et pour quatre autres valeurs de *a* : – 2, 0, 1 et 2.

1. Sur cette feuille annexe, construire Γ et ses droites asymptotes. (0,5 point)

2. Pour chacune des courbes C_a tracées (autres que $C_{\frac{1}{4}}$), déterminer la valeur correspondante de *a* en indiquant la méthode utilisée. (0,5 point)

Partie D

Dans cette partie, on considère la fonction h_a obtenue pour $a=\frac{1}{4}$.

Soit λ un nombre réel supérieur à – 2 ; on appelle D_λ l'ensemble des points du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

1. Exprimer $I = \int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)\,dt$ en fonction de λ ; on pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation différentielle (E). (1 point)

2. Soit $A(\lambda)$ la mesure en unités d'aire de l'aire D_{λ} ; quelle est la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$? (1 point)