EXERCICE 2 (*5 points*)

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

(R) Pour tout entier naturel n on a : $P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right)$.

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \text{ et } V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n$$

   a. Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Exprimer U_n en fonction de n.

   b. En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.
   En déduire que, pour tout n, on a: $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$. Calculer V_n.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = 2\left(V_n - U_n\right)$. En déduire une expression de P_n en fonction de n.

   d. Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
   Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand?