

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration.

En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit.

Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.

On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours ; ainsi, $a_0 = 2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1 878,8 kg.

2. On affirme que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,02a_n - 100$.

- a. Justifier à l'aide de l'énoncé la relation précédente.

- b. On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$b_n = a_n - 5000.$$

Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser son premier terme b_0 et sa raison.

- c. En déduire pour tout entier naturel n , une expression de b_n en fonction de n , puis montrer que $a_n = 5000 - 3000 \times 1,02^n$.
 - d. En déterminant la limite de la suite (a_n) , justifier que les algues finissent par disparaître.
3. a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine le nombre de jours nécessaire à la disparition des algues.

<pre>N ← 0 A ← 2000 Tant que ... A ← ... N ← N + 1 Fin Tant que Afficher ...</pre>
--

- b. Quel est le résultat renvoyé par l'algorithme?
4. a. Résoudre par le calcul l'inéquation $5000 - 3000 \times 1,02^n \leq 0$.
- b. Quel résultat précédemment obtenu retrouve-t-on?