

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année 2015 + n . Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.
 - a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.
2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3		Traitement : Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leq 100$ faire
L6		n prend la valeur $n + 1$
L7		U prend la valeur $1,12U - 6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ...

- a. Recopier et compléter la ligne L9.
- b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

- c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
 - b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.
 - c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.
 - d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?