

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en  $\text{mg.l}^{-1}$  (milligramme par litre), doit être comprise entre  $140 \text{ mg.l}^{-1}$  et  $180 \text{ mg.l}^{-1}$ .

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de  $160 \text{ mg.l}^{-1}$ .

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

### Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de  $10 \text{ mg.l}^{-1}$ .

On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite  $(C_n)$ , le terme  $n$  donnant une estimation de la concentration du produit, en  $\text{mg.l}^{-1}$ , au début de la  $n$ -ième semaine. On a  $C_0 = 160$ .

1. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$ .
2. Soit la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $V_n = C_n - 100$ .
  - a. Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9 et que  $V_0 = 60$ .
  - b. Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$ .
3.
  - a. Déterminer la limite de la suite  $(C_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini. Justifier la réponse.  
Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
  - b. Au bout de combien de semaines la concentration devient -elle inférieure à  $140 \text{ mg.l}^{-1}$  ?
4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

### Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de  $12 \text{ mg.l}^{-1}$ . Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?