

Dans une grande entreprise, les commerciaux ont le choix de services de téléphonie mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.

On s'intéresse aux parts de marché de ces deux opérateurs chez les commerciaux de cette entreprise.

Chaque commercial dispose d'un seul abonnement chez l'un ou l'autre des opérateurs : A et B.

Les abonnements sont souscrits pour une période d'un an, à partir du 1^{er} janvier.

Une statistique, menée sur les choix des commerciaux, a révélé que :

- parmi les abonnés de l'opérateur A, 18 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur ;
- parmi les abonnés de l'opérateur B, 22 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur.

On admet que les mouvements d'abonnés d'un opérateur à l'autre se poursuivront dans ces proportions dans les années à venir.

De plus on sait qu'au 1^{er} janvier 2014, 40 % des commerciaux avaient souscrit un abonnement chez A et 60 % chez B.

On note, pour tout entier naturel n :

- u_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n ;
- v_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez B au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n .

On a donc $u_0 = 0,4$ et $v_0 = 0,6$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n$ et que $u_n + v_n = 1$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,22$.
3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - 0,55$.
 - a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n$.
4. Conjecturer la limite de la suite (u_n) . Comment interpréter ce résultat sur l'évolution des parts de marché dans les années futures ?