

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de $1\,500\text{ m}^2$ entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n , on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :
 $v_n = u_n - 250$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.
 - c. Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
4. a. Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :

$$250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$$

Interpréter le résultat obtenu.

- b. Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.
5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain.
A-t-il raison ? Justifier la réponse.