

La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

Partie A

- On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Début Saisir une valeur pour N U prend la valeur 5 Pour i de 0 à N faire Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$ Fin Pour Afficher U Fin	Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Début Saisir une valeur pour N Pour i de 0 à N faire U prend la valeur 5 Afficher U Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$ Fin Pour Fin	Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Début Saisir une valeur pour N U prend la valeur 5 Pour i de 0 à N faire Afficher U Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$ Fin Pour Fin
algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3

- On saisit la valeur 9 pour N , l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,185	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059
---	-----	------	-------	-------	--------	--------	--------	--------	--------

Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

Partie B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 2$.

- Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0 .
- Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a $u_n = 2 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Étudier les variations de la suite (u_n) .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leq 10^{-6}$?