

EXERCICE 2 (5 points)

Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

PARTIE A : ETUDE THEORIQUE :

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année 2005 + n .

Ainsi, $u_0 = 100\,000$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,05u_n + 4\,000$.
- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + 80\,000$.
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que $u_n = 180\,000 \times (1,05)^n - 80\,000$.
 - d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PARTIE B :

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la PARTIE A.

- 1) Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
- 2) A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?