

**EXERCICE 3** (5 points)

Le 1<sup>er</sup> janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1<sup>er</sup> janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $u_n$  le nombre d'employés de l'entreprise le 1<sup>er</sup> janvier de l'année (2005+n).

- 1) a. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .  
La suite  $u$  de terme général  $u_n$  est-elle arithmétique? géométrique? Justifier les réponses.  
  
b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$ .
- 2) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $v_n = u_n - 1000$ .
  - a. Démontrer que la suite  $v$  de terme général  $v_n$  est géométrique. Préciser sa raison.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 500 \times 0,9^n + 1000$ .
  - c. Déterminer la limite de la suite  $u$ .
- 3) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$ .  
En déduire le sens de variation de la suite  $u$ .
- 4) Au 1<sup>er</sup> janvier 2005, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?