

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

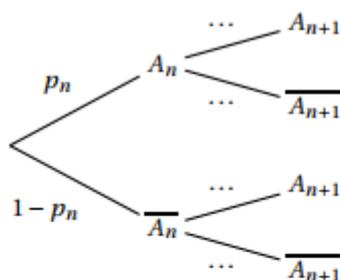
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle », On admet que

- 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
- 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement « l'élève a choisi « Approfondissement » la n -ième semaine » et p_n la probabilité de l'évènement A_n . On a alors $p_1 = 0,2$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - 0,4.$$

- a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme u_1 .
- b. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n , puis l'expression de p_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	I et N sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1 P est un nombre réel
Entrée	Saisir N
Initialisation	P prend la valeur 0,2
Traitement	Pour I allant de 2 à N : P prend la valeur $0,5P + 0,2$ Fin Pour
Sortie	Afficher P

- a. Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 5$.
- b. Modifier l'algorithme afin qu'il affiche le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9.