

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.

Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de  $120 \text{ m}^2$  au 1<sup>er</sup> janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10% la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de  $4 \text{ m}^2$ .

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1<sup>er</sup> janvier 2018.

On modélise la situation par une suite  $(u_n)$  où  $u_n$  représente la superficie de terrain en  $\text{m}^2$  envahi par la Renouée du Japon au 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $2017 + n$ .

La suite  $(u_n)$  est donc définie par  $u_0 = 120$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$ .

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2017.

Recopier et compléter les lignes L1, L3, L4 et L7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.

*On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.*

|    |                             |
|----|-----------------------------|
| L1 | $U$ prend la valeur ...     |
| L2 | $N$ prend la valeur 0       |
| L3 | tant que .....              |
| L4 | $U$ prend la valeur .....   |
| L5 | $N$ prend la valeur $N + 1$ |
| L6 | Fin tant que                |
| L7 | Afficher .....              |

3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 40$ .

- Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,9$  et préciser le premier terme.
- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier naturel  $n$ .
- Justifier que  $u_n = 80 \times 0,9^n + 40$  pour tout entier naturel  $n$ .

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation

$$80 \times 0,9^n + 40 \leq 60.$$

- En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2017

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.