

EXERCICE 2 (5 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :
 $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
 - b. Calculer v_0 . Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. a. Vérifier que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$.
b. En déduire la monotonie de la suite.
5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter.