

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.

Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.

Le 1^{er} janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.

On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n , u_n est le nombre de vélos le 1^{er} janvier de l'année $2017 + n$.

Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 30$.

1.
 - a. Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1^{er} janvier 2018?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
 - d. La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.

En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1^{er} janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.

Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.

 - a. Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
 - b. Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1^{er} janvier 2017 au 1^{er} janvier 2025.