

Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.

Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au mois de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Au mois de janvier, lors du premier test, le laboratoire a prélevé au hasard 1 000 poissons parmi l'ensemble des poissons du bassin.

La fréquence de poissons infectés par la bactérie dans cet échantillon est $f_1 = 5\%$.

Au mois de juin, le laboratoire a prélevé de nouveau 1 000 poissons.

Pour ce second test, la fréquence de poissons infectés est $f_2 = 10\%$.

La fréquence de poissons infectés dans les deux échantillons ayant doublé en cinq mois, le laboratoire préconise d'arrêter la vente des poissons de l'entreprise.

On note p_1 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de janvier et p_2 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de juin.

- Déterminer les intervalles de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 puis de la proportion p_2 .
On arrondira les bornes des intervalles à 10^{-3} .
- Quel argument pourrait donner l'entreprise pour éviter l'arrêt de la vente?

Partie B

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

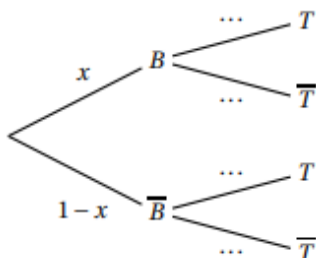
- sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;
- sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

- B l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;
- T l'évènement : « le test du poisson est positif » ;
- $\bar{B}$ et $\bar{T}$ les évènements contraires de B et T .

On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

- Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2.
 - a. Démontrer que $p(T) = 0,5x + 0,1$.
 - b. Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif. Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement ?

Partie C

Un traitement antibiotique permet de guérir les poissons infectés par la bactérie.

Le temps de guérison d'un poisson infecté, exprimé en jours, peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 21$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Déterminer la probabilité $p(14 < X < 28)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un poisson infecté ne soit pas encore guéri après 5 semaines de traitement antibiotique.