

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

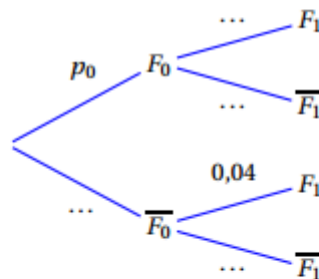
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son évènement contraire ;
- F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1^{er} mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



b. Montrer que $p_1 = 0,9p_0 + 0,04$.

Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0,55$ et on note, pour tout entier naturel n , F_n l'évènement « la personne interrogée le n -ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.

On admet de plus, que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour J allant de 1 à N P prend la valeur $0,9P + 0,04$ Fin Pour
Sortie :	Afficher P

- Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 1$.
- Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
- $$u_n = p_n - 0,4.$$
- a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0 .
- b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.
4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leq 0,45$.
- b. Interpréter le résultat trouvé.