

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1; 7]$ par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1; 7]$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7]$:
 - a. Calculer $f'(x)$.
 - b. Calculer $f''(x)$.
2. Déterminer sur quel intervalle la fonction f est convexe.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1; 7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1; 7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1; 7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1; 7]$, on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}.$$

2.
 - a. Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1; 7]$.
 - b. Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.
3. On considère la fonction Γ définie sur l'intervalle $[1; 7]$ par :

$$\Gamma(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 24x + 1 + 48 \ln x.$$

- a. Montrer que Γ est une primitive de c sur l'intervalle $[1; 7]$.
 - b. Calculer la valeur moyenne μ de c sur l'intervalle $[1; 7]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .