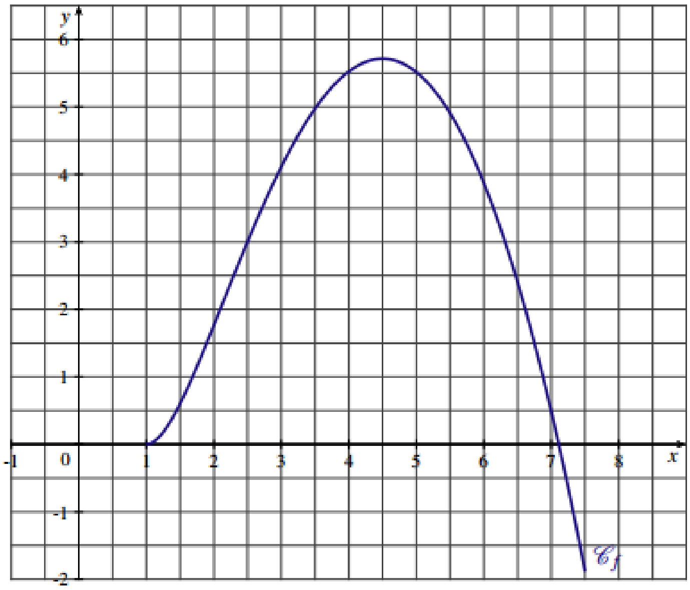
**PARTIE A :** Étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;7,5]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9\ln(x) - 10$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.




1. a) Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;7,5]$, on a $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 11x - 9}{x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;7,5]$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur cet intervalle.
2. La dérivée seconde de la fonction $f$ est la fonction $f''$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;7,5]$ par $f''(x) = \dfrac{9}{x^2} - 2$.
   Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

**PARTIE B :** Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 750 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour $x$ centaines de pièces fabriquées et vendues ($1 \leqslant x \leqslant 7,5$), est modélisé par $f(x)$, où $f$ est la fonction définie dans la partie **A**.

1. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[7;7,5]$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.
   b) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.
2. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.