Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $\mathrm{I} =]0 ; 3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x\ln x.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.
La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I.

Partie A

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.
   a. Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
   b. Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
   c. Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?
2. On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x = 90\ln 3 - 40$.
   a. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits.
D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a : $B'(x) = -20x + 20\ln x + 30$.
2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	$B'(3)$

a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?