

On considère la fonction f définie sur $[0,5; 10]$ par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

1. Vérifier que $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.
2. Étudier le signe de la fonction f' sur $[0,5; 10]$, en déduire le tableau de variations de f sur $[0,5; 10]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0,5; 10]$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} par défaut.
4. On considère la fonction F définie et dérivable sur $[0,5; 10]$ telle que :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x).$$

Montrer que F est une primitive de f sur $[0,5; 10]$.

5. Calculer $I = \int_1^3 f(x) dx$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
6. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 3]$: en donner une valeur approchée au millième.