

Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut en produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle $[1 ; 6]$.

Le coût total de production C_T , exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4 \ln x + 5,6 \quad \text{pour } x \in [1 ; 6].$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in [1 ; 6]$.

On rappelle que $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

- a. Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x .
- b. On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 6]$ et on appelle C'_M sa fonction dérivée.

Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \frac{x^2 - 3,2 - 8 \ln x}{2x^2}$ pour tout x de l'intervalle $[1 ; 6]$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 6]$ par $f(x) = x^2 - 3,2 - 8 \ln x$.
 - a. On admet que f est dérivable sur $[1 ; 6]$. Étudier les variations de f sur $[1 ; 6]$.
 - b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $[2 ; 6]$; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α .
 - c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1 ; 6]$ (on ne demande pas de justification).
4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question 3. b.
 - a. En utilisant les résultats de la question 3., étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1 ; 6]$. Construire son tableau de variation (les valeurs dans le tableau seront arrondies au dixième).
 - b. Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?

5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Comment faut-il choisir le prix de vente du mètre cube de produit pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices quelle que soit la production choisie dans l'intervalle donné ?