

**EXERCICE 4** (6 points)

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$  par  $f(x) = 18 \ln x - x^2 + 16x - 15$ .

Si  $x$  représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que  $f(x)$  représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.

On suppose que  $f$  est dérivable sur  $[0,5 ; 25]$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

**PARTIE A**

- Calculer  $f'(x)$ . Vérifier que, pour tout nombre  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ , on a 
$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}.$$
- Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ . En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ .
- Calculer  $f(1)$ .
  - Montrer que sur l'intervalle  $[18 ; 19]$  l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ . Déterminer une valeur approchée par défaut de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
  - En déduire le signe de  $f(x)$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ .
- Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 € ? Justifier la réponse.

**PARTIE B**

- On admet que la fonction  $G$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty [$  par  $G(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $]0 ; +\infty [$ .  
En déduire une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ .
- Rappel : soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $[a ; b]$ , où  $a < b$ .  
La valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a ; b]$  est le nombre réel  $m$  défini par*

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.