EXERCICE 4 (6 *points*)

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle [0,1 ; 10] par :

$$B(x) = 10 \times \frac{1+\ln x}{x}$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

1. Coraline utilise un logiciel de calcul formel. À plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

(Commande)	B(x) : = 10*((1+ln(x))/x)
(Réponse 1)	$x \mapsto 10 * \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$
(Commande)	deriver (B(x),x)
(Réponse 2)	$\frac{10}{x^2} + \frac{10*(1+\ln(x))*(-1)}{x^2}$
(Commande)	résoudre(B(x) = 0,x)
(Réponse 3)	$[\exp(-1)]$
(Commande)	résoudre(B(x) > 0,x)
(Réponse 4)	$[x > \exp(-1)]$
(Commande)	maximum(B(x), [0.1 ;10])
(Réponse 5)	10

---

   a. Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

   b. Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.

2. a. Démontrer qu'une primitive de la fonction B sur l'intervalle [0,1 ; 10] est la fonction F définie sur [0,1 ; 10] par

   b. Calculer $\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

   Ce nombre représente le bénéfice mensuel moyen en milliers d'euros lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois un nombre d'objets compris entre 50 et 150.

3. Pour quel nombre d'objets le bénéfice mensuel B est-il maximal ? Justifier la réponse par un calcul.

Annexe à rendre avec la copie