

**EXERCICE 4**

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.

Si  $x$  désigne la quantité journalière produite, on appelle  $C_T(x)$ , pour  $x$  variant de 0,25 à 5, le coût total de production correspondant.

La courbe  $\Gamma_1$  fournie en annexe 2 est la représentation graphique de la fonction  $C_T$  sur l'intervalle  $[0,25 ; 5]$ .

La tangente à  $\Gamma_1$  au point  $A(1 ; 1)$  est horizontale.

**PARTIE A**

1. a. On admet que la recette  $R(x)$  (en milliers d'euros) résultant de la vente de  $x$  centaines de litres de médicament, est définie sur  $[0,25 ; 5]$  par  $R(x) = 1,5x$ .  
Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

b. Tracer, sur le graphique fourni en annexe 2, le segment représentant graphiquement la fonction  $R$ .

2. Lectures graphiques

*Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe 2.*

*Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*

- a. Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la «plage de rentabilité», c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégagant un bénéfice positif.  
b. Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.  
c. Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?  
À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

**PARTIE B**

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total  $C_T$  est définie sur l'intervalle  $[0,25 ; 5]$  par :

$$C_T(x) = x^2 - 2x \ln(x).$$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour  $x$  centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1,5 - x^2 + 2x \ln(x).$$

Calculer  $B(2)$ , et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la partie A.

2. On suppose que la fonction  $B$  est dérivable sur l'intervalle  $[0,25 ; 5]$  et on note  $B'$  sa fonction dérivée. Montrer que  $B'(x) = 2 \ln(x) - 2x + 3,5$ .  
3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction  $B'$ , dérivée de la fonction  $B$ , sur l'intervalle  $[0,25 ; 5]$  :

$x$	0,25	1	5
$B'(x)$	$y_1$	1,5	$y_2$

On précise les encadrements :  $0,22 < y_1 < 0,23$  et  $-3,29 < y_2 < -3,28$ .

- a. Démontrer que l'équation  $B'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0,25 ; 5]$ .

*Pour la suite de l'exercice, on prendra 2,77 pour valeur approchée de  $\alpha$ .*

- b. Dresser le tableau précisant le signe de  $B'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0,25 ; 5]$ .  
En déduire le tableau de variations de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[0,25 ; 5]$ .

4. a. Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres). Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.
- b. Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

Annexe 2

