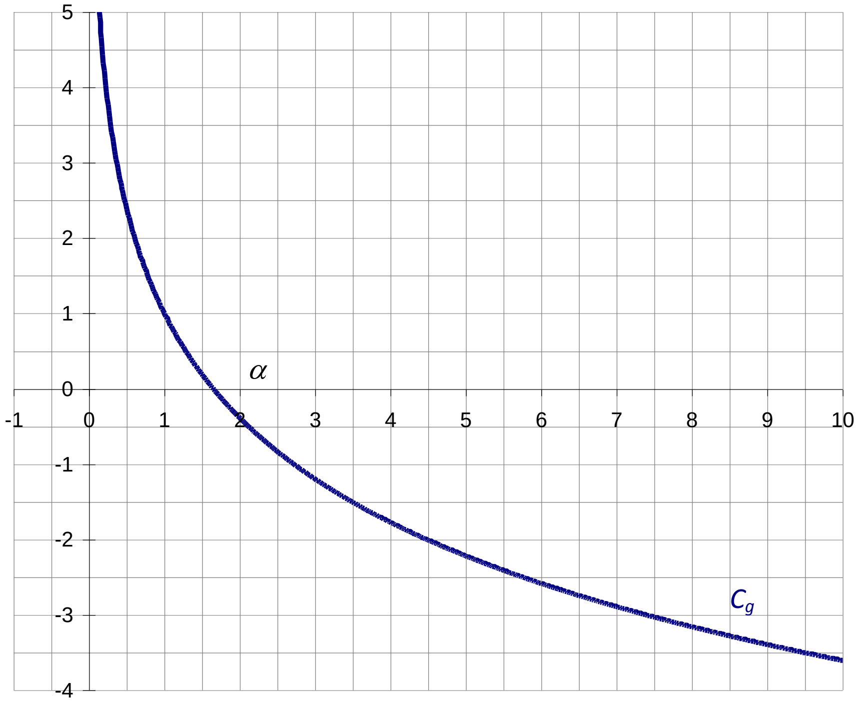
PARTIE A – Etude préliminaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=1-2\ln(x)$. On donne ci-dessous sa courbe représentative C_g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Cette courbe C_g coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α.



1. Déterminer la valeur exacte de α .
2. On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞ [.
   Donner, en justifiant, le signe de $g(x)$ sur l'intervalle]0 ; +∞ [.

PARTIE B – Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞ [par $f(x)=\dfrac{2\ln(x)+1}{x}$

1. Déterminer la limite de f en +∞ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$).

   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞ [.

   On pourra remarquer que $f(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)+\dfrac{1}{x}$.

   b. Soit $I=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.