EXERCICE 4 (5 *points*)

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1+\ln(x)$.

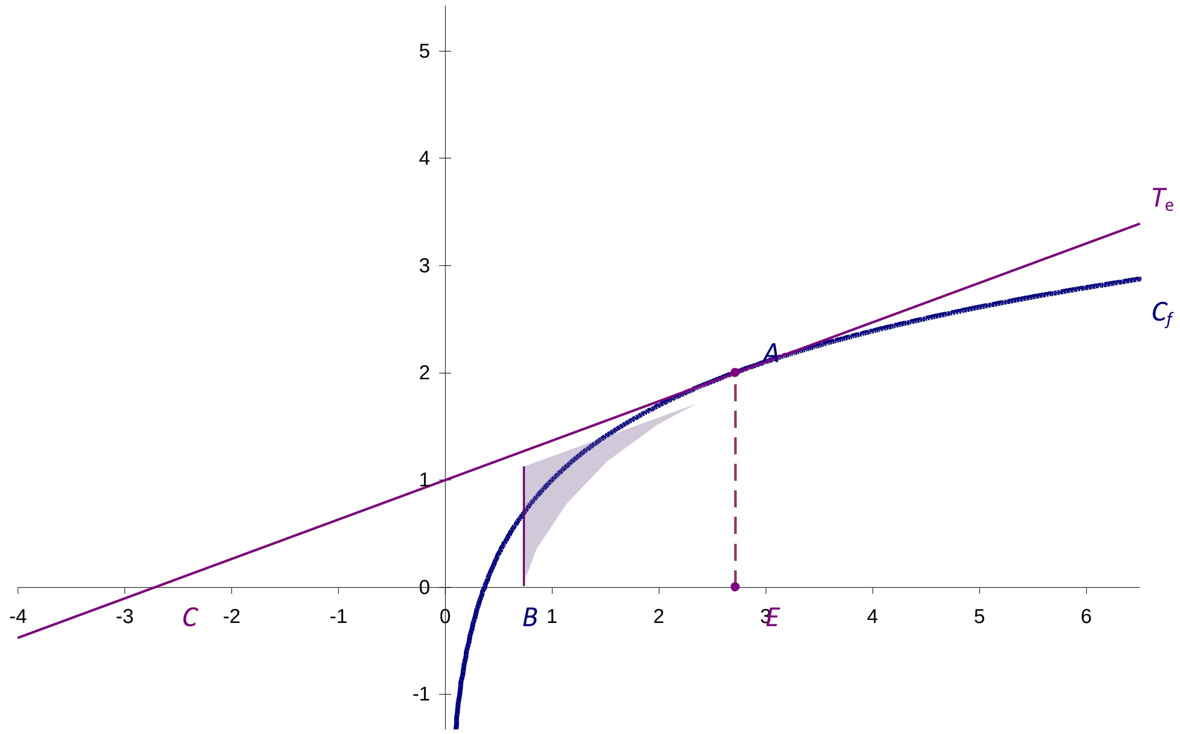
On note C_f la courbe représentative de *f* dans un repère du plan.

Le point $A(\mathrm{e}\ ;\ 2)$ appartient à C_f et on note T_e la tangente à C_f au point *A*.

Le point *C* est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses.

Le point *E* a pour coordonnées (e ; 0).

On admettra que sur $]0;+\infty[$, C_f reste en dessous de T_e.



1. a. Le point *B* est le point d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.
   Calculer les coordonnées du point *B*.

   b. Démontrer que, pour $x \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$, $f(x) \geq 0$.

2. a. Déterminer une équation de T_e.

   b. En déduire les coordonnées du point *C*.

   c. Vérifier que les points *E* et *C* sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

3.

On considère la fonction *g* définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x$.

a. Démontrer que la fonction *g* est une primitive de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.

b. En déduire la valeur exacte de $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter ce nombre.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte*.

a. Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par C_f, T_{e} et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par *B* et *E*. Ce domaine est grisé sur le graphique.

b. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.

D