

**exercice 4** (5 points)**PARTIE A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$ .

1. Étudier les variations de  $g$  sur  $[1 ; +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation  $g(x) = 0$  dans  $[1 ; +\infty[$ .
3. En déduire que  $g(x) > 0$  si et seulement si  $x > \sqrt{e}$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .
  - a. Montrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = 4xg(x)$ .
  - b. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[1 ; +\infty[$  et en déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[1 ; +\infty[$ .
3.
  - a. Montrer que, dans l'intervalle  $[2 ; 3]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique notée  $\alpha$ .
  - b. Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .