EXERCICE 4 (*7 points*)

Les parties A et B sont indépendantes. Le candidat pourra utiliser les résultats préliminaires dans la partie A, même s'il ne les a pas établis.

PRELIMINAIRES

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\dfrac{6}{x}-6x^2$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x)=6\ln x-2x^3-3$. On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En utilisant 1., déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle]0 ; +∞[. On ne demande pas les limites dans cette question.
3. En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x)=x+\dfrac{3\ln x}{2x^2}$.

1. Déterminer les limites de f en + ∞ et en 0.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que, pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{2x^3}$
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

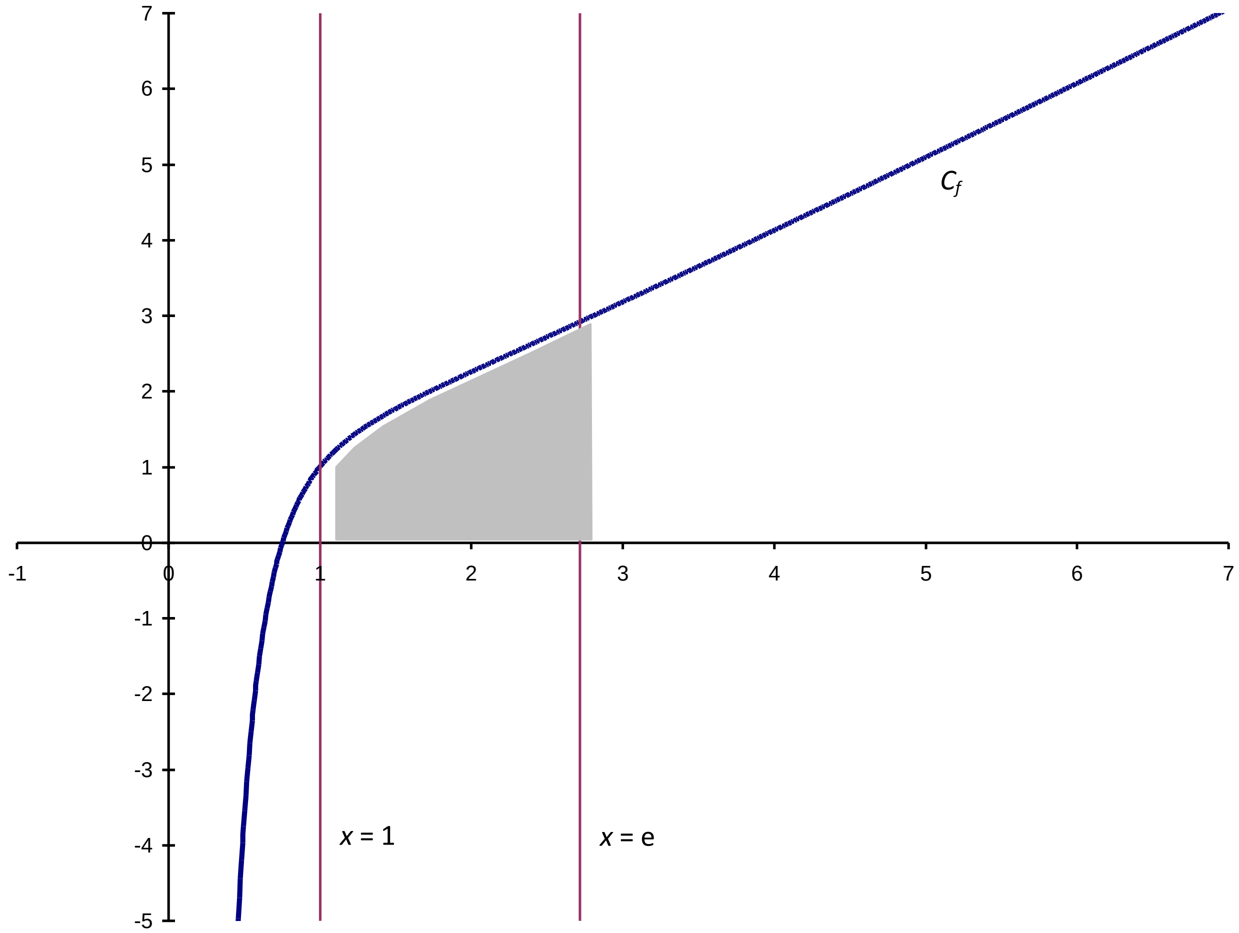
PARTIE B

1. On définit la fonction F sur l'intervalle]0 ; +∞[par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1+\ln x}{x}$.

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

2. On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée C_f.
   On a colorié le domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

   Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
C_f
$x = 1$
$x = \mathrm{e}$