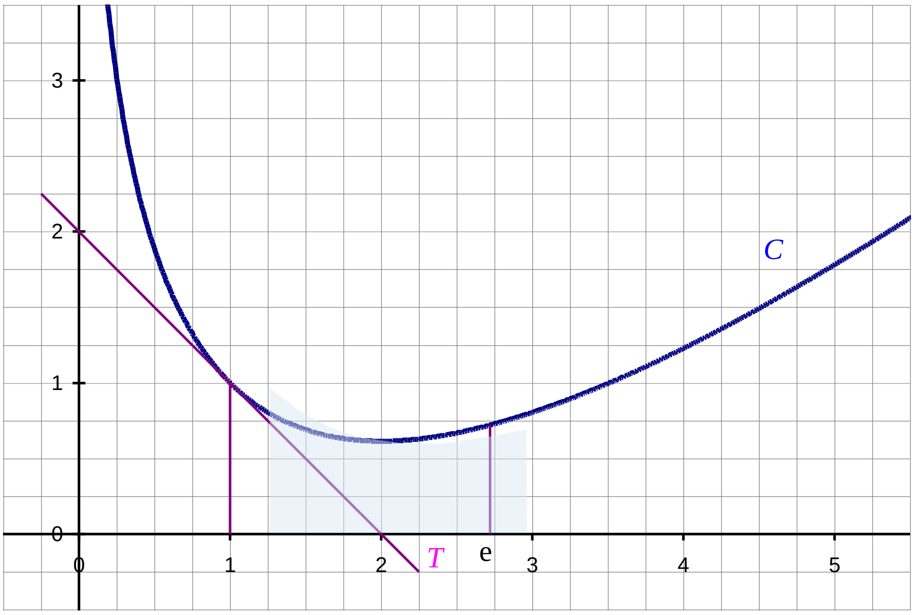
EXERCICE 2 (*5 points*)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[dont on donne la représentation graphique (*C*) dans le repère ci-dessous.



On admet que :

- le point *A* de coordonnées (1 ; 1) appartient à la courbe (*C*) ;
- la tangente (*T*) en *A* à la courbe (*C*) passe par le point de coordonnées (2 ; 0) ;
- la courbe (*C*) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ;
- l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction *f*.

PARTIE A

1. Donner, par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$, où f' est la fonction dérivée de *f* sur]0 ; + ∞[.
2. On admet que l'expression de $f(x)$ sur]0 ; + ∞[est : $f(x) = ax + b + c\ln x$ où *a*, *b* et *c* sont des nombres réels.
   a. Calculer $f'(x)$ en fonction de *x* et de *a*, *b* et *c*.
   b. Démontrer que les réels *a*, *b* et *c* vérifient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ a+\dfrac{c}{2}=0 \end{cases}$
   c. Déduire de la question précédente les valeurs de *a*, *b* et *c*, puis l'expression de $f(x)$.

PARTIE B

Dans cette partie, on admet que la fonction *f* représentée ci-dessus est définie pour tout réel *x* appartenant à]0 ; + ∞[par : $f(x) = x - 2\ln x$.

1. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de *f* .
2. a. Calculer la dérivée g' de la fonction *g* définie pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x$
   b. En déduire une primitive *F* de la fonction *f* sur]0 ; + ∞[.
   c. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aires, de l'aire du domaine grisé sur le graphique ci-dessus, délimité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les d'équation *x* = 1 et *x* = e.