

EXERCICE 4 (7 points)**PARTIE I : ETUDE D'UNE FONCTION**

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle : $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$ et dont la représentation graphique est donnée en annexe 2.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
2. a. Déterminer le signe de l'expression $5(1 - X)(X - 2)$ suivant les valeurs du réel X .
b. En déduire que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par le tableau suivant :

x	0	e	e^2	$+\infty$		
Signe de $f(x)$		-	0 	+	0 	-

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{5(3 - 2 \ln x)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
b. En déduire les variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ puis donner une valeur approchée arrondie à 0,01 près de ces solutions.

PARTIE II : APPLICATION

Une entreprise fabrique et revend des jouets.

$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 10, f désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte. Interpréter concrètement le résultat de la question 1. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros. Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.