EXERCICE 4 (*6 points*) **COMMUN A TOUS LES CANDIDATS**

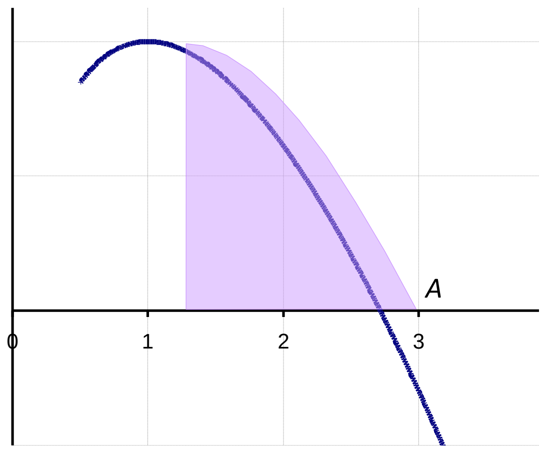
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x(1-\ln x)$.

On appelle *C* la courbe représentative de la fonction *f*.

1. a. Calculer les limites de la fonction *f* en +∞ et en 0 (on rappelle que la limite en 0 de la fonction *u* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $u(x)=x\ln x$ est 0).
   b. Déterminer $f'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de *f*).
   c. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation $f(x)=0$. En déduire que la courbe *C* admet un unique point d'intersection *A* avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point *A*.
3. a. Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x)\geq 0$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe *C* ?

   b. Montrer que la fonction *F* définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x^2\left(\frac{3}{2}-\ln x\right)$ est une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$.
   c. On désigne par *D* le domaine délimité par la courbe *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et *x* = e.



Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de *D* puis, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.