EXERCICE 3 (10 *points*)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

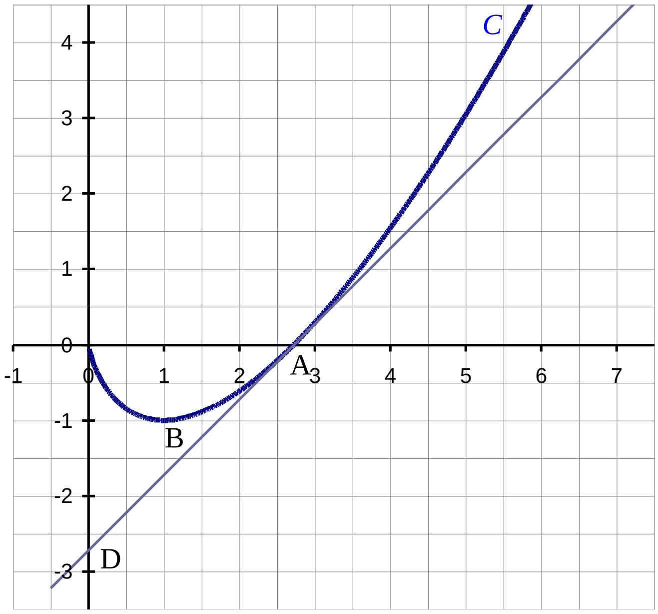
PARTIE A Lectures graphiques

La courbe *C* ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction *f* définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note *f '* la fonction dérivée de *f* .

La courbe *C* passe par les points A(e ; 0) et B(1 ; − 1).

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point D(0 ; − e).



1. Déterminer une équation de la droite (AD).

Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question 2.

2. Par lectures graphiques :
   a. Déterminer *f* (1) et $f'(1)$.
   b. Dresser le tableau de signes de *f* sur]0 ; 5].
   c. Dresser le tableau de signes de f' sur]0 ; 5].
   d. Soit *F* une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$ .Déterminer les variations de *F* sur]0 ; 5].
   e. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe *C* et les droites d'équation *x* = 4 et *x* = 5.

PARTIE B Étude de la fonction

La courbe *C* de la partie A est la représentation graphique de la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x(\ln x-1)$.

1. a. Déterminer la limite de *f* en + ∞.
   b. Soit *h* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x \ln x$. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$.
   Déterminer la limite de *f* en 0.
2. a. Montrer que, pour tout *x* de $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\ln x$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de *f* sur $]0;+\infty[$.
3. a. Démontrer que la fonction *H* définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction *h* définie à la question 1. b.
   b. En déduire une primitive *F* de *f* et calculer $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   c. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On arrondira le résultat au dixième.