EXERCICE 4 *(7 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x+2x^2-3$.
   Le tableau de variation de la fonction *g* est donné ci-dessous :

x	0	α	$+\infty$
g	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

   En utilisant une calculatrice on a obtenu $\alpha\approx 1{,}19$.

   Dresser le tableau donnant le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $]0;+\infty[$

2. On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{\ln x}{x}+2x-5$.

   On note C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

   a) Déterminer la limite de la fonction *f* en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction *f* en + ∞.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f*.
   a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel *x* de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

   b) En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel *x* supérieur ou égal à e.
   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=\left(\ln x\right)^2$.
   a) Calculer la dérivée h' de *h*.
   b) En remarquant que pour tout *x* de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}h'(x)+2x-5$,

   trouver une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c) Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\mathrm{e}$ et $x=\mathrm{e}^2$ (*On donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième*).